UnADM
UNIVERSIDAD ABIERTA Y A DISTANCIA DE MÉXICO

Cálculo integral

U1 | Integrales

División de Ciencias de la Salud, Biológicas y Ambientales

Integrales

Cálculo integral. *Referencia https://www.flickr.com/*

Índice

Presentación....4
Competencia específica....5
Propósito....5
1.1. Integral definida....6
1.1.1. Área de una región....6
1.1.2. Área mediante suma de rectángulos infinitesimales....9
1.1.3. Integral definida....18
1.1.4. Suma de Riemann....20
1.1.5. Evaluación de integrales....23
1.1.6. Regla del punto medio....24
1.1.7. Propiedades de la integral definida....25
1.2. Teorema fundamental del cálculo....29
1.2.1. Teorema fundamental del cálculo....29
1.2.2. Derivación e integración como procesos inversos....33
1.3. Integral indefinida....34
1.3.1. Integral indefinida....34
1.3.2. Tabla de integrales indefinidas....35
1.4. Regla de sustitución....37
1.4.1. Regla de sustitución....37
1.4.2. Integrales definidas....40
1.4.3. Simetría....41
Cierre de la unidad....43
Fuentes de consulta....44

Presentación

En esta unidad empezaremos a desarrollar los fundamentos matemáticos para construir el cálculo integral.

Verás que, para calcular el área de una función, partiremos del hecho de sumar las áreas de rectángulos bajo una gráfica y el eje *x*, situación que nos conducirá al concepto de sumas de Riemann y al concepto de integral definida.

Abordaremos algunas propiedades importantes de la integral definida que te permitirán desarrollar tus habilidades a la hora de evaluar una integral.
En esta unidad te darás cuenta de que el cálculo integral y diferencial están ligados por un eslabón muy importante: el teorema fundamental del cálculo. Es una herramienta muy poderosa para evaluar integrales de manera muy práctica.

Al igual que existen integrales definidas, también existen integrales indefinidas, mostraremos cuál es esa pequeña diferencia. Empezarás a calcular integrales no tan complicadas mediante el uso de tabla de integrales y mediante sustitución. Por último, revisaremos algunas reglas de simetría que algunas integrales poseen, ya que te permitirán ahorrarte trabajo cuando integres ciertas funciones.

Competencia específica

Unidad 1

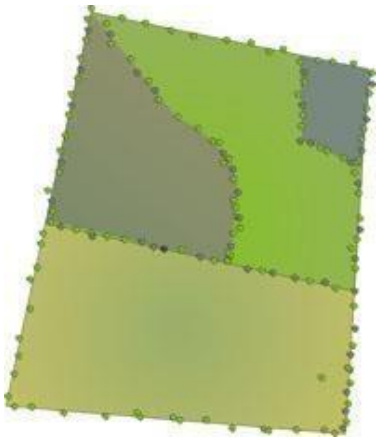
Describe el proceso de integración para calcular áreas entre curvas, volúmenes, así como el valor promedio de una función a través del uso de integral definida e indefinida y el teorema fundamental del cálculo con base en definiciones, modelos y reglas.

Propósitos

Calcular integrales mediante sumas de Riemann y el teorema fundamental del cálculo, además de calcular volúmenes y promedios. También, estudiar la integral definida y la indefinida.

1.1. Integral definida

En algunas ocasiones nos hemos encontrado en la situación de tener que calcular el área de alguna región de forma irregular, como ejemplo, calcular el área de un terreno de forma irregular para saber el valor monetario en función del precio por metro cuadrado.



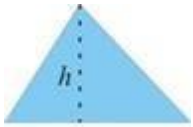
En esta sección veremos el desarrollo para llegar al concepto de integral definida. Veremos también algunas propiedades, también empezarás a evaluar algunas integrales sencillas mediante las sumas de Riemann.

1.1.1. Área de una región

Algunos de nosotros tenemos la idea intuitiva de lo que es área. Sabemos que es fácil calcular las áreas de ciertas figuras simplemente con saber la forma y su fórmula. Nos viene a la mente que el área limitada por un cuadrado es la multiplicación de su lado por lado $A = l \times l$; de un rectángulo es lado por su altura; de un triángulo es la multiplicación de su base por su altura $A = b \times h$. Así sucesivamente podemos citar muchas figuras con sus respectivas fórmulas para calcular sus áreas.

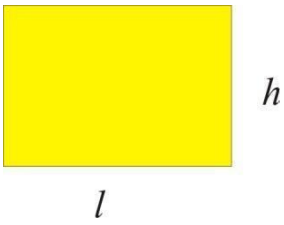
$A = l \times l$

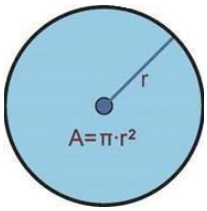
$A = l \times h$



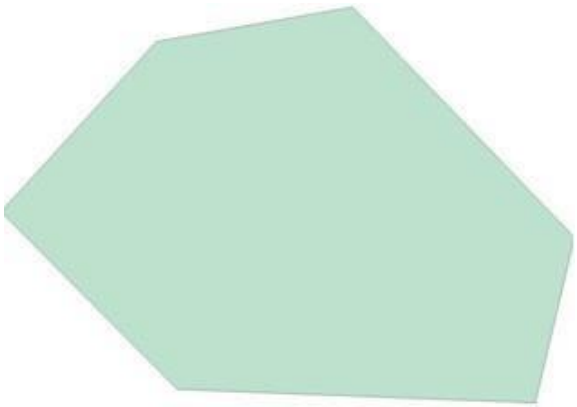
$A = \frac{b \times h}{2}$

El área, entonces, es la región limitada por ciertas fronteras, como puede ser líneas rectas, como el caso del cuadrado, o bien, por líneas curvas, como el caso del círculo.

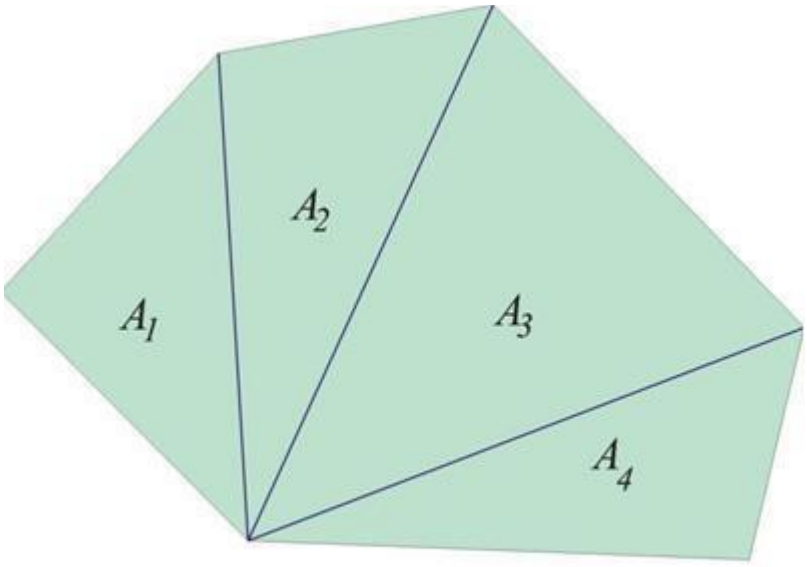




Ahora nos enfrentamos a calcular el área de una figura que tiene forma irregular. Pensemos en un terreno. Por lo general, algunos terrenos no tienen una forma muy bien definida, veamos el siguiente ejemplo:



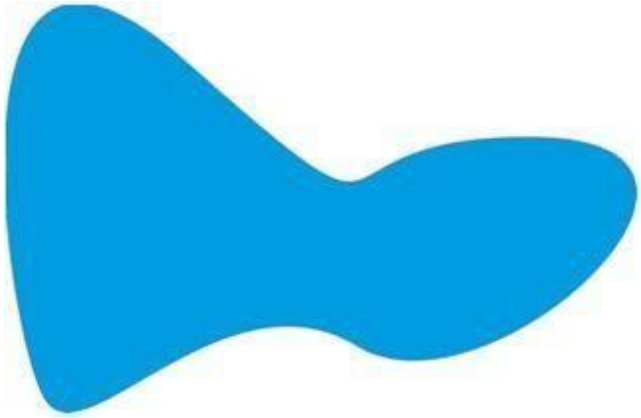
Suponiendo que se conocen los lados del terreno, la pregunta es: ¿cuál es el área? La solución es sencilla: únicamente hay que dividirlo en triángulos, calcular el área de cada triángulo y sumar las áreas de todos los triángulos para encontrar el área total del terreno.



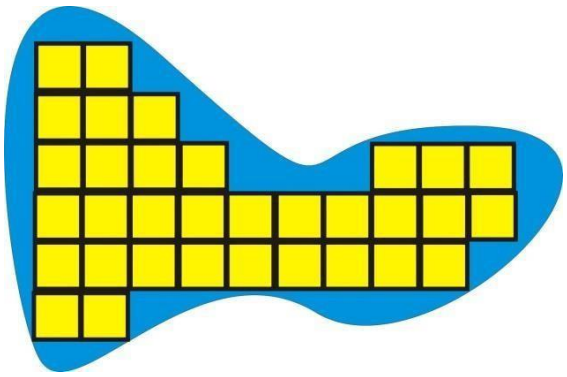
$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

Así que el área total de este terreno es $A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

Veamos ahora una figura un poco más compleja ¿cómo se hallaría el área para la siguiente figura?



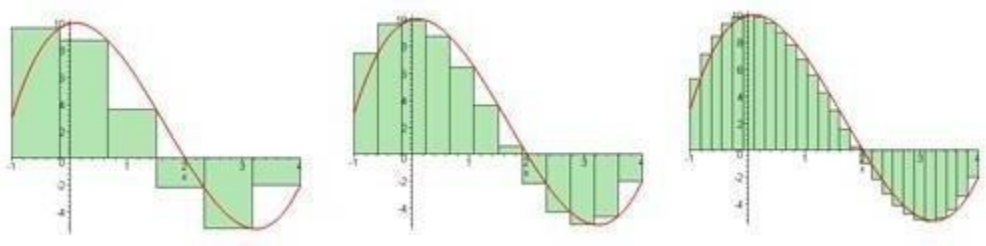
La respuesta es, inscribir repetidamente el área de una figura geométrica cuya área es conocida, y para ello escogemos el cuadrado. El área de cada cuadrado representa una unidad de área. La figura quedaría así.



El área aproximada de la figura es de 33 unidades de área. Podríamos ser más precisos, y para ello tendremos que hacer más pequeños nuestros cuadrados.

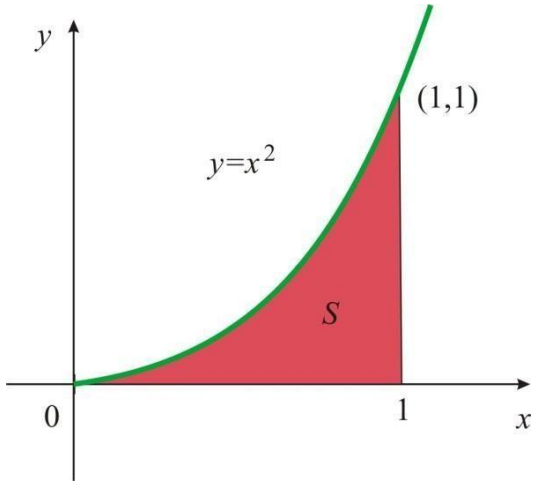
Nota: Hace aproximadamente 2500 años, los griegos sabían cómo hallar el área de cualquier polígono al dividirlo en triángulos. También hallaron la forma de encontrar el área de una figura curva; lo que hicieron fue inscribir polígonos en la figura y hacer que el número de lados del polígono aumentara. Usaban el método conocido como de agotamiento o exhaución.

1.1.2. Área mediante suma de rectángulos infinitesimales



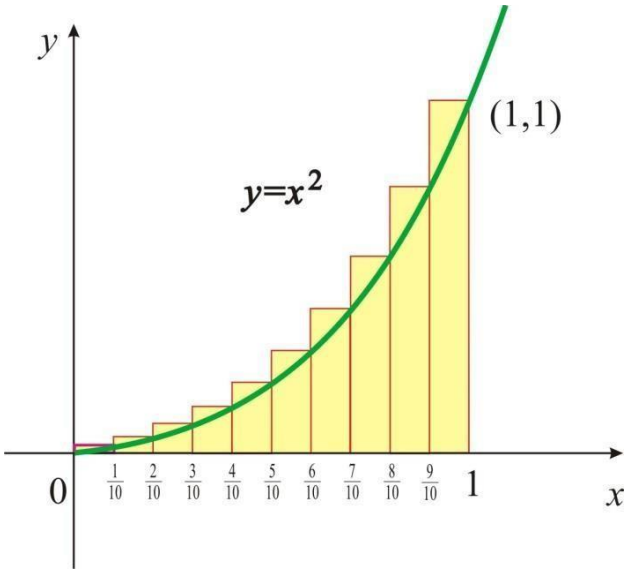
En este subtema obtendremos el área bajo una curva por aproximación de rectángulos, como se muestra en el objeto de arriba. Posteriormente se tomará el límite de estos rectángulos. El procedimiento es el siguiente:

Consideremos el siguiente desarrollo. Sea la función $y = x^2$. Hallaremos el área bajo la curva en la región comprendida entre 0 y 1 del eje *x*.



Podemos hallar el área aproximada, inscribiendo rectángulos debajo de la curva descrita por $y = x^2$ en la región comprendida entre 0 y 1. El área de la región está dada por la suma de todos los rectángulos inscritos en la región *S*.

Dividamos el segmento [0,1] en 10 partes iguales, esto significa que la base de cada rectángulo es igual a 1/10. La altura para cada rectángulo es tomada del lado derecho de cada rectángulo, es decir, las alturas los rectángulos son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos extremos de la derecha.



Considerando de la imagen que, para cada número *X* de las abscisas, existe un valor para *y*, se cumple la función $f(x)=x^2$.

La altura para el primer rectángulo es $f\left(\frac{1}{10}\right)=\left(\frac{1}{10}\right)^2$.

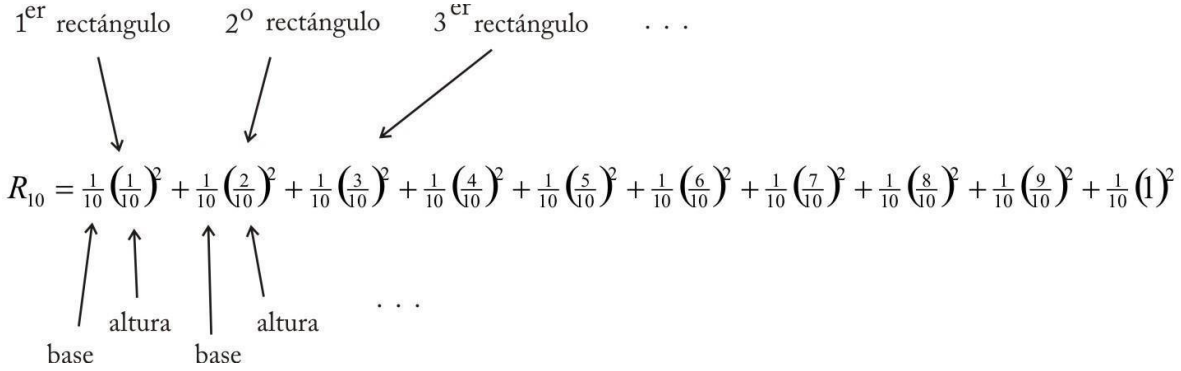
Para el segundo $f\left(\frac{2}{10}\right)=\left(\frac{2}{10}\right)^2$,

Para el tercero $f\left(\frac{3}{10}\right)=\left(\frac{3}{10}\right)^2$,

De manera análoga se calcula las demás alturas para cada uno de los rectángulos. Así que podemos escribir las alturas de los rectángulos de la siguiente manera:

$\left(\frac{1}{10}\right)^2,\left(\frac{2}{10}\right)^2,\left(\frac{3}{10}\right)^2,\left(\frac{4}{10}\right)^2,\left(\frac{5}{10}\right)^2,\left(\frac{6}{10}\right)^2,\left(\frac{7}{10}\right)^2,\left(\frac{8}{10}\right)^2,\left(\frac{9}{10}\right)^2$ y 1^2

La suma de las áreas de todos los rectángulos es la suma aproximada debajo de la curva comprendida entre 0 y 1:



Realizamos la suma de todas las fracciones:

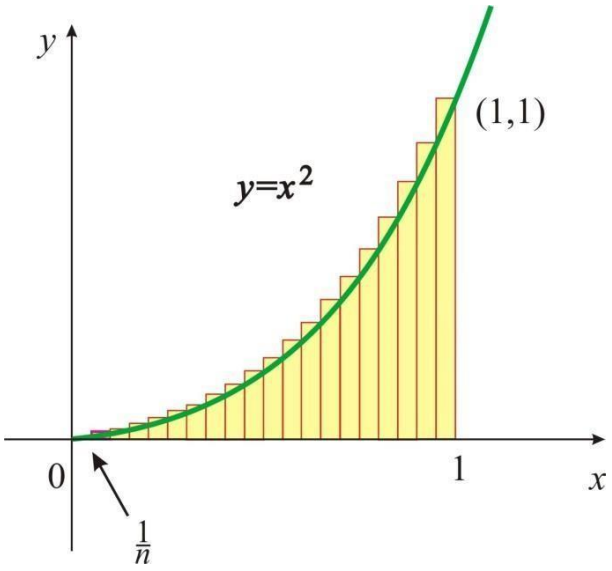
$$R_{10} = \frac{77}{200} = 0.385$$

Esta es el área aproximada de la región S; sin embargo, nuestros rectángulos sobresalen por encima de la gráfica, lo cual quiere decir que el área que hemos calculado es mayor que el área A de la región S.

$$A<0.385$$

Para tener una mejor estimación del área A bajo la curva, lo que tendremos que hacer es considerar un incremento de rectángulos, y así las bases de los rectángulos serán cada vez más pequeñas. Al calcular la suma total de rectángulos infinitesimales, obtendremos mejores estimaciones para el área de la región S.

Si incrementamos infinitamente el número de rectángulos n, de tal forma que el ancho de cada uno de ellos se hiciera muy pequeño, veremos que la suma de todos los rectángulos superiores se aproxima al área A bajo la curva.



De manera similar al desarrollo anterior, R_n es la suma de *n* rectángulos de la figura de arriba, aquí el ancho de cada rectángulo vale $\frac{1}{n}$ y las alturas las obtenemos al evaluar los puntos $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}$,... hasta $\frac{n}{n}$ en la función $f(x)=x^2$, entonces, las alturas son: $\left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \left(\frac{3}{n}\right)^2, \left(\frac{4}{n}\right)^2$,...así sucesivamente hasta $\left(\frac{n}{n}\right)^2$.

El área total está dada por la suma de las áreas de todos los rectángulos.

$$R_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{4}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

Factorizamos $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}$

$$R_n = \frac{1}{n}\frac{1}{n^2}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right.$$

$$R_n = \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right.$$

La suma de cuadrados tiene una expresión general dada por:

$$\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Sustituimos la expresión en nuestro desarrollo anterior.

$$R_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n/(n+1)(2n+1)}{6n^2 n/} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Ahora le aplicamos el límite cuando el número de rectángulos tiende a ser infinito $n \to \infty$ debajo de la curva.

$$R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Reacomodamos algunos términos:

$$R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{(n+1)}{n}\right)\left(\frac{(2n+1)}{n}\right)$$

$$R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

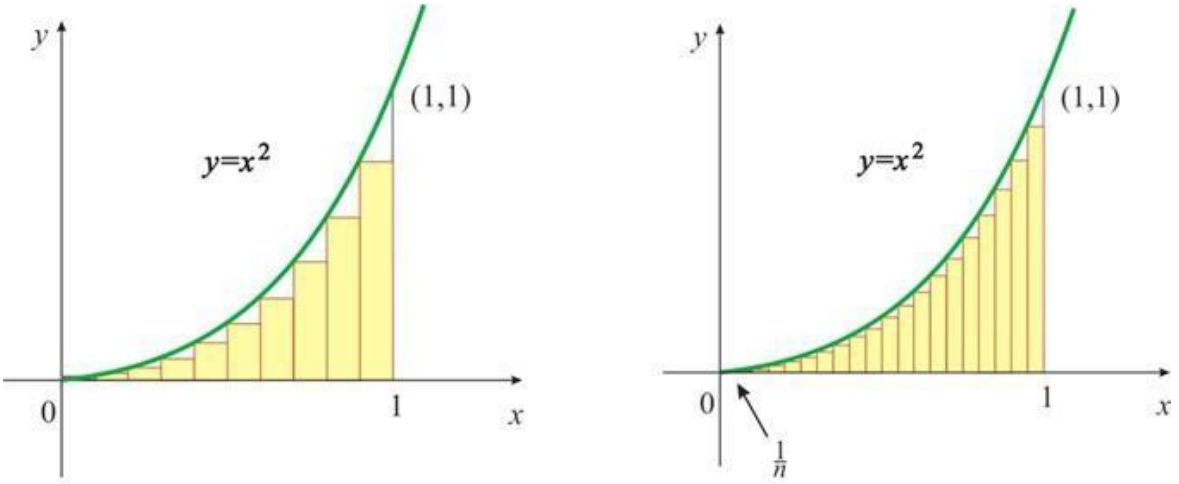
Recordemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Evaluamos los límites,

$$R_n = \frac{1}{6}(1+0)(2+0) = \frac{1}{6}2 = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, el área de la región S es:

$$R_n = \frac{1}{3}$$

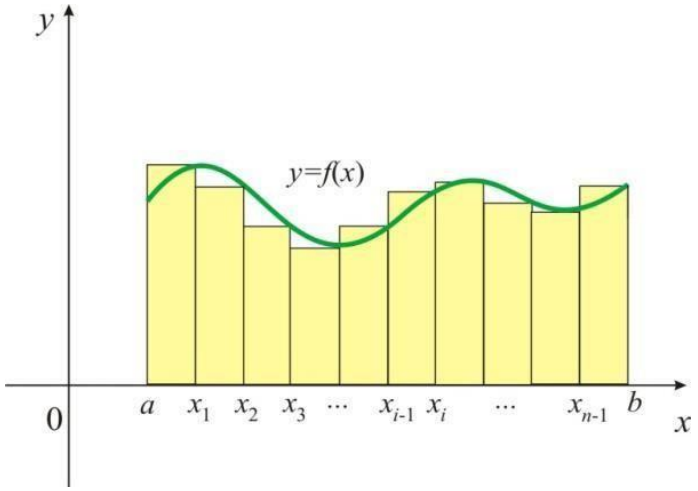
Con la misma metodología se puede calcular el área de la región *S*, usando rectángulos inscritos cuyas alturas fueran los valores de f en los puntos extremos izquierdos de los subintervalos. Llegaríamos al mismo resultado cuando aplicamos el límite de infinitos rectángulos debajo de la función.



$$A = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{3}$$

Esto quiere decir que no importa donde se tome la altura de los rectángulos; ya sea que pongamos rectángulos superiores o rectángulos inferiores, siempre vamos a llegar al mismo resultado, los límites son iguales.

Ahora estamos preparados para analizar una región más general. Hallemos el área de la curva siguiente. Tomemos la región mostrada en la figura de tal modo que subdividimos el intervalo [*a*, *b*] en *n* rectángulos de anchos iguales.



El ancho del intervalo [*a*, *b*] es *b*-*a*; por lo tanto, el ancho para cada rectángulo es:

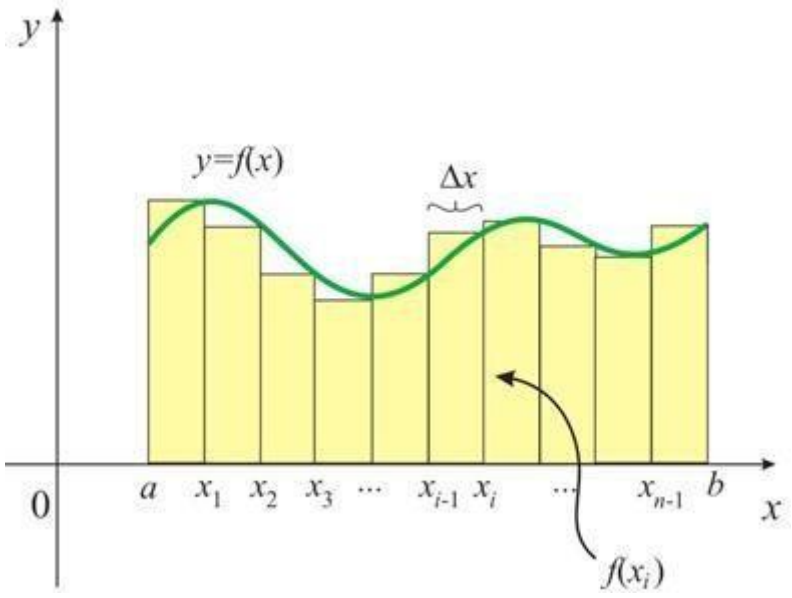
$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Los puntos extremos de la derecha de los subintervalos son:

$$x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad x_3 = a + 3\Delta x, \ \text{L} \quad x_n = a + n\Delta x,$$

Para un *i*-ésimo rectángulo que tiene un ancho Δx y una altura *f* (x_i), que es el valor de *f* en los puntos extremos de la derecha, tiene un área igual a $f(x_i) \cdot \Delta x$. Observa detenidamente la figura de abajo.

Nota: Cuando decimos "*i*-ésimo" hacemos referencia a un elemento que se encuentra en la posición "*i*", así que, si estamos hablando de rectángulos nos referimos a la posición *i* que tiene un rectángulo sobre el eje *x*.



Entonces, el área bajo la curva delimitada por el intervalo [*a*,*b*] es aproximadamente la suma de las áreas de todos los rectángulos.

$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \text{L} + f(x_n)\Delta x$$

Podemos asignar valores para *n*. Recuerda que *n* es el número de rectángulos que divide el intervalo [*a*,*b*].

Te aseguramos que esta aproximación va a mejorar a medida que se incrementa la cantidad de rectángulos bajo la curva, es decir, cuando $n \to \infty$.

Una vez analizado el caso general para un área aproximada, podemos definir el área *A* de la región *S*.

Definición. El **área** *A* de una región *S* que se encuentra debajo de una función continua *f* es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \text{L} + f(x_n)\Delta x\right]$$

Ojo, para que el límite exista se está suponiendo una función *f* continua.

Frecuentemente se usa la notación sigma para escribir de manera compacta las sumas que contienen muchos términos. Por ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \text{L} + f(x_n)\Delta x$$

Nota:

En la notación sigma $\sum_{i=m}^{n} f(x_i)\Delta x$ se identifican las siguientes partes.

i=m, indica que debemos comenzar con *i=m,*
n indica terminar con el elemento *n*,
y el símbolo $\sum$ indica sumar.

Por lo tanto, la definición anterior la podemos escribir de la siguiente manera:

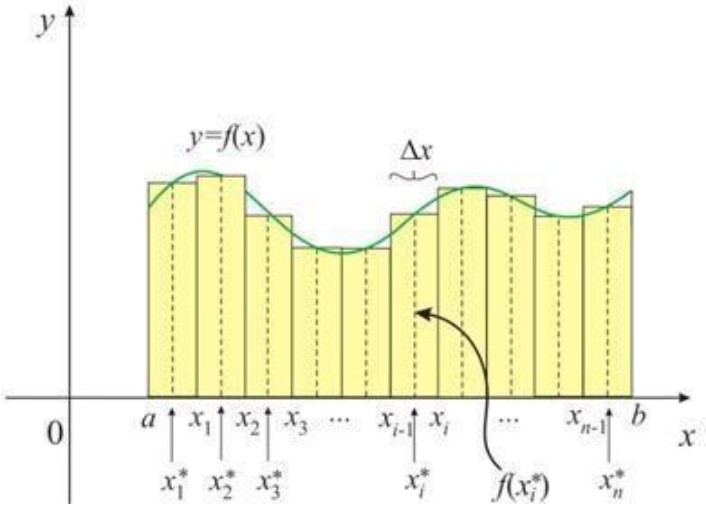
$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Se tiene el mismo valor de área cuando se escogen los puntos extremos a la izquierda.

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

Si en lugar de usar los puntos extremos izquierdos o derechos, se toma la altura del *i*-ésimo rectángulo como el valor de *f* en cualquier número X_i^* en el *i*-ésimo subintervalo $[X_{i-1}, X_i]$. Los números $X_1^*, X_2^*, \ldots X_n^*$ reciben el nombre de puntos muestra.

La figura de abajo muestra los rectángulos de aproximación cuando se eligen puntos muestra diferentes a los puntos de los extremos.



La expresión más general para el área bajo la gráfica de la función *f* es:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}^*)\Delta x$$

1.1.3. Integral definida

Anteriormente habíamos obtenido un límite de la forma $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x^*_{i-1})\Delta x$ cuando se calcula un área bajo una curva. Hablando más general, este tipo de límite se presenta en varias situaciones, incluso cuando la función *f* no es positiva, por tal motivo, a este tipo de límite se le da un nombre y una notación especial.

Definición de integral definida. Si *f* es una función continua definida para $a \le x \le b$, dividimos el intervalo [*a*,*b*] en *n* subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b-a)/n$. Denotamos con x_0 (=*a*), $x_1, x_2, \ldots x_n$ (=*b*) los puntos extremos de estos subintervalos y elegimos los puntos muestra $x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*$ en estos subintervalos de modo que x_i^* se encuentre en el *i*-ésimo subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces **la integral definida de *f*, desde *a* hasta *b*** es:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Nota:

En una integral se identifican las partes:

$$\int_a^b f(x)dx$$

El signo $\int$ se llama signo de integral y corresponde a una ***S*** alargada, debido a que una integral es un límite de sumas.

Las letras *a* y *b* son los límites de integración, *a* es el límite inferior y *b* es el límite superior de la integral.

A *f*(*x*) se le llama integrando.

dx no tiene significado, sin embargo, denota con respecto a qué variable se está integrando, y de cálculo diferencial lo identificamos como un diferencial.

Al procedimiento para calcular una integral se le llama integración.

Nota:

La integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es un número, no depende de *x*. Se puede tomar cualquier letra en lugar de *x*, sin cambiar el valor de la integral.

Ejemplos:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(\theta)d\theta = \int_a^b f(r)dr = \int_a^b f(s)ds$$

1.1.4. Suma de Riemann

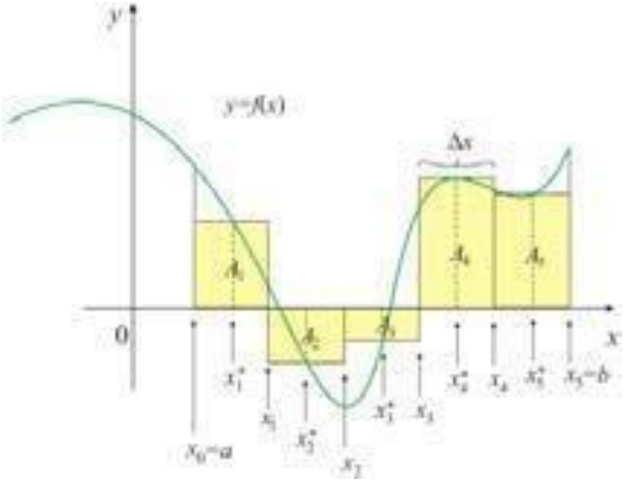
A la suma que está mostrada en la parte derecha de la definición de integral definida:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

se le conoce con el nombre de suma de Riemann.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Esta sumatoria representa la suma de áreas de los rectángulos de aproximación.
La gráfica muestra la representación geométrica de la suma de Riemann de la función $f(x)$.



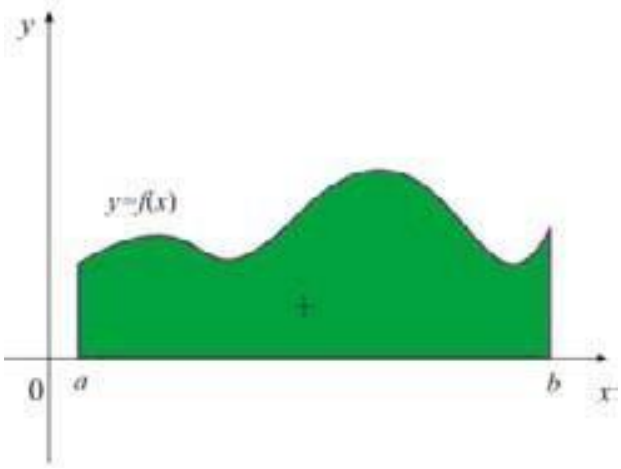
Con este ejemplo podemos ver que la suma de Riemann es:

$$\sum_{i=1}^{5} f(x_i^*)\Delta x = A_1 + (-A_2) + (-A_3) + A_4 + A_5$$

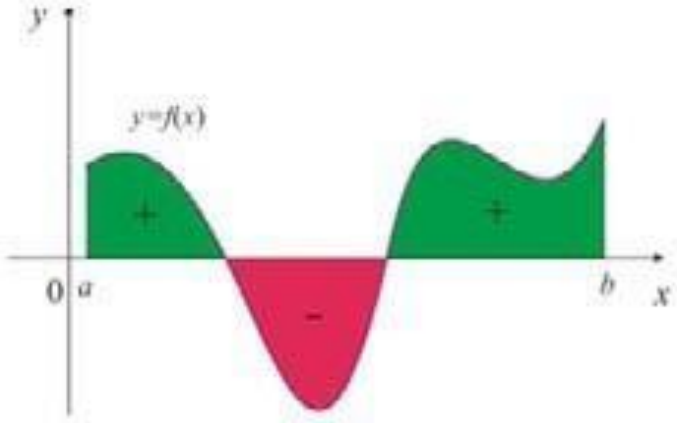
Si $f(x_i^*) \geq 0$ es positiva, la suma de Riemann puede interpretarse como una suma de áreas de los rectángulos de aproximación cuyas áreas son positivas. Por otra parte, los términos con signo negativo son inversos aditivos de áreas y surgen de las particiones o rectángulos que quedan debajo del eje *x*, ya que en ese tramo $f(x_i^*) < 0$.

De la relación de la definición de integral definida y sumas de Riemann tenemos que:

- Si $f(x) \geq 0$, la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es el área bajo la curva $y = f(x)$, desde *a* hasta *b*.



- Si $f(x)$ adquiere tanto valores positivos como negativos la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es la diferencia de áreas:



$$\int_a^b f(x)dx = A_{\text{R arriba}} - A_{\text{R abajo}}$$

Donde $A_{\text{R arriba}}$ representa el área de la región por arriba del eje *x* y debajo de la gráfica $f(x)$; y $A_{\text{R abajo}}$ representa la región debajo del eje *x* y arriba de la gráfica $f(x)$.

Podemos ver un video de la suma de Riemann (viene en dos partes) muestra un ejemplo de cómo hallar el área bajo una curva aplicando el concepto de sumas de Riemann, aplicando el concepto de integral definida.

http://www.youtube.com/watch?v=WAMDWommjOY
http://www.youtube.com/watch?v=gRSUM98AHL0&feature=related

Ejemplo

Expresa $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[x_i^5 + x_i \operatorname{sen} x_i\right]\Delta x$ como una integral en el intervalo [0,π].

Solución

De acuerdo con la definición de integral definida, el límite siempre existe y da el mismo valor. No importa cómo se elijan los puntos muestra x_i^*, podemos remplazar $x_i^* = x$ tomando como puntos muestra los puntos extremos derechos, por lo tanto, el límite lo podemos escribir como:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

Comparando el límite de la función dada $f(x_i)$ en la definición de integral definida $f(x)$ con la integral de nuestra función, identificamos que:

$$f(x_i) \to f(x)$$

$$f(x_i) \to x^5 + x\operatorname{sen} x \text{ cuando } x_i^* = x\,.$$

En consideración de lo anterior, podemos escribir la solución de la siguiente manera.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[x_i^5 + x_i \operatorname{sen} x_i\right]\Delta x = \int_0^{\pi}\left(x^5 + x\operatorname{sen} x\right)dx$$

1.1.5. Evaluación de integrales

Antes de continuar con el procedimiento para calcular integrales definidas a través de sumas, es necesario que conozcas las siguientes identidades y reglas sencillas para trabajar con sumatorias.

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} c = nc \qquad \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left\lfloor \frac{\lceil n(n+1) \rceil^2}{2} \right\rfloor$$

Consideremos el siguiente ejemplo.

a) Evaluar la suma de Riemann para $f(x) = x - 2,$ en el intervalo [3,5].

b) Evalúe $\int_3^5 x - 2dx$

Solución.

a) Δx estaba dado por:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Sustituimos *a* y *b*,

$$\Delta x = \frac{5-3}{n} = \frac{2}{n}$$

Para la *i*-ésima partición o rectángulo,

$$x_i = a + i\Delta x = 3 + \frac{2}{n} i$$

La suma de Riemann está dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x,$$

recuerde que la función $f(x)$ es $f(x) = x - 2,$ así que sustituimos x_i y Δx.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}(x_i - 2)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(3 + \frac{2i}{n}\right) - 2\right]\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{n} + \frac{4i}{n^2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{n} + \frac{4i}{n^2}\right)$$

Sacamos de las sumas los términos que no dependan de *i* y sustituimos el valor de la sumatoria correspondiente, según las fórmulas que dimos al principio de la sección.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(3+\frac{2i}{n}\right)-2\right]\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{n}+\frac{4i}{n^2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{n}+\frac{4i}{n^2}\right)$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}1+\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i = \frac{2}{n}(n)+\frac{4}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = 2+2\left(\frac{n+1}{n}\right) = 2+2\left(1+\frac{1}{n}\right) = 2\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

Finalmente tenemos el *n*-ésimo término de la suma de Riemann.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = 2\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

b) Aplicando el concepto de integral definida se tiene el área bajo la curva entre los límites 3 y 5 del eje *x*.

$$A = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} 2\left(2+\frac{1}{n}\right) = 2(2+0) = 4$$

1.1.6. Regla del punto medio

Anteriormente el punto medio de un rectángulo más pequeño es x_i^*, cuyo valor era arbitrario, podía estar entre x_{i-1} y x_i. Sin embargo, como cualquier suma de Riemann es una aproximación a una integral, es conveniente usar puntos medios denotados por $\bar{x}_i$. Tenemos la regla que dice.

Regla de punto medio

$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x = \Delta x[f(\bar{x}_1)+\cdots+f(\bar{x}_n)]$, donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Y $\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1}+x_i)$ que es el punto medio de intervalo o la base del rectángulo $[x_{i-1}, x_i]$

Ejemplo

Calcular por aproximación la integral $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ usando la regla del punto medio con *n*=5.

Solución

Si se tiene un intervalo [1, 2] y se toma *n*=5, se tienen 5 subintervalos que son: 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8 y 2.0.

$$\Delta x = \frac{2-1}{5} = \frac{1}{5}$$

Los puntos medios son $x_1 = \frac{1}{2}(1.2+1) = 1.1$, así sucesivamente para los demás: 1.3, 1.5, 1.7 y 1.9.

La integral aproximada es:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \Delta x\left[f(1.1)+f(1.3)+f(1.5)+f(1.7)+f(1.9)\right]$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \frac{1}{5}\left[\frac{1}{1.1}+\frac{1}{1.3}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.7}+\frac{1}{1.9}\right]$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx 0.692$$

1.1.7. Propiedades de la integral definida

En esta sección encontrarás las propiedades de la integral, las cuales son de gran utilidad para evaluar integrales. Considere que las funciones *f* y *g* son continuas.

Si $a > b$ se cumple

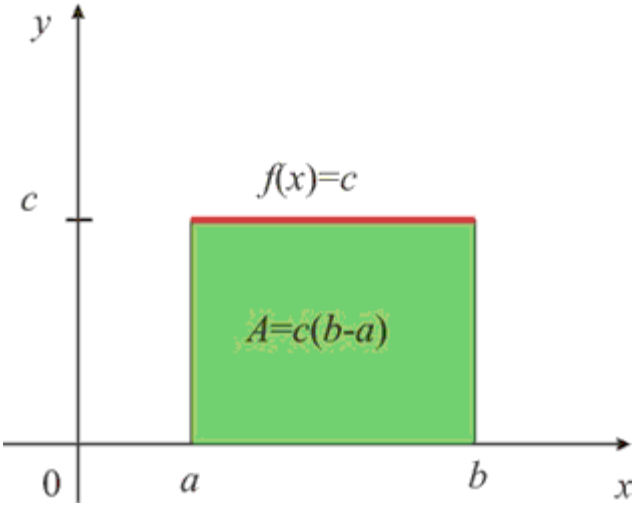
1. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Si $a = b$, $\Delta x = 0$

2. $\int_a^a f(x)dx = 0$

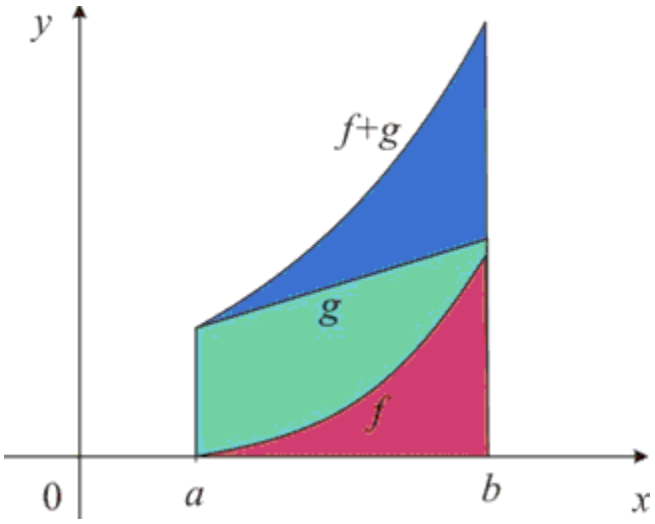
Propiedades básicas de las integrales

3. $\int_a^b cdx = c(b-a)$, *c* es una constante.



La integral de una suma es la suma de las integrales.

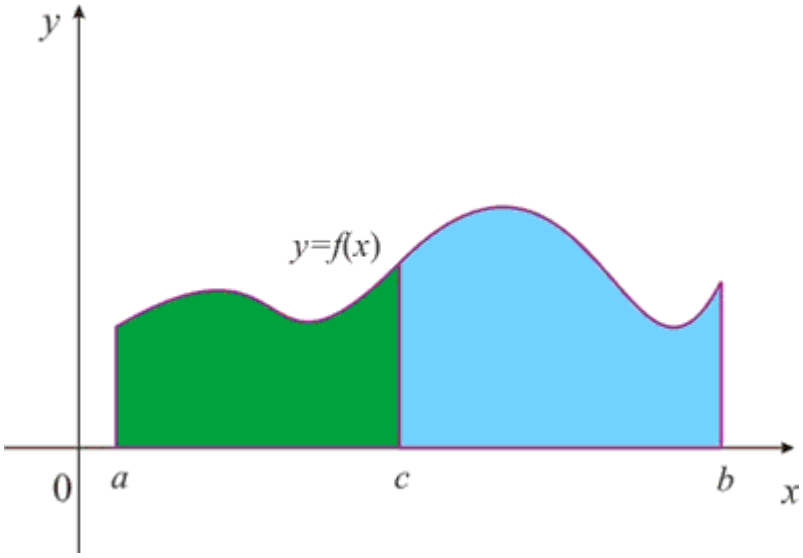
4. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$



5. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, c es una constante.
6. $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

Si $f(x) \geq 0$ y $a < c < b$ se cumple la propiedad.

7. $\int_a^b f(x)dx + \int_c^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

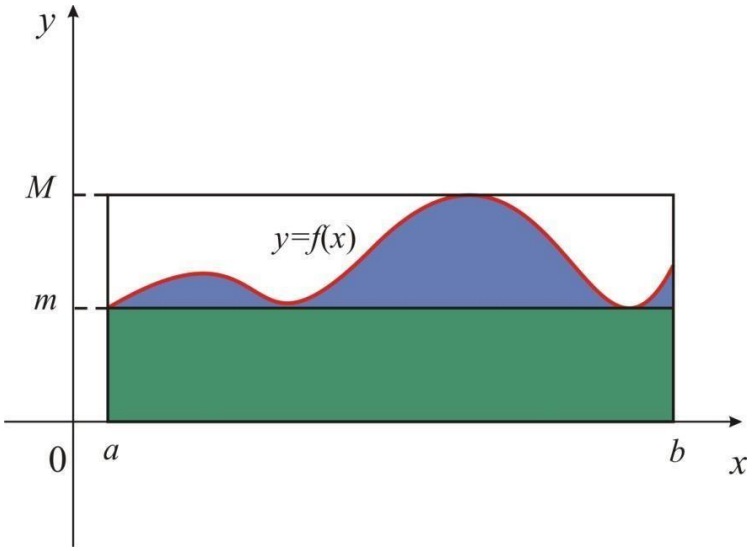


Propiedades de orden de la integral

Las siguientes propiedades son válidas para $a \leq b$

8. Si $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
9. Si $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
10. Si $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$, entonces $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Esta última propiedad está ilustrada en la siguiente figura. Afirma que el área bajo la gráfica de *f* es mayor que el área del rectángulo de altura *m* y menor que el área del rectángulo de altura *M*.


y
M
m
y=f(x)
0
a
b
x

1.2. Teorema fundamental del cálculo

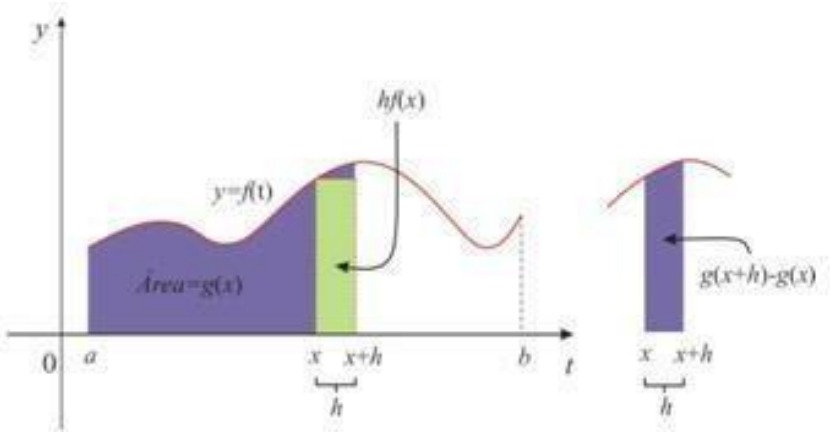
En esta sección veremos el teorema fundamental del cálculo, así como su importancia en cálculo para integrar y/o derivar.

Recordemos que el teorema fundamental del cálculo establece la conexión entre las dos ramas del cálculo, el diferencial y el integral. En otras palabras, la diferenciación y la integración son procesos inversos. Dan la relación precisa entre la derivada y la integral. El TFC permite calcular integrales con mucha facilidad sin tener que emplear límites de sumas.

1.2.1. Teorema fundamental del cálculo

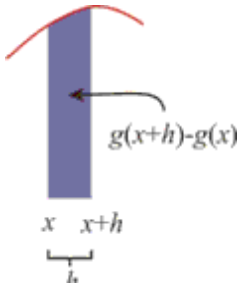
El teorema fundamental del cálculo se establece en dos partes. Veamos la primera parte.

Primera parte del teorema fundamental del cálculo
La primera parte del teorema fundamental del cálculo se deriva del siguiente análisis. Consideremos la siguiente gráfica.

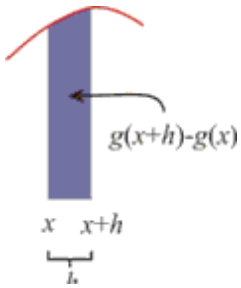


Tenemos una curva en rojo, representada por una función $f(t)$ como lo muestra la gráfica. Por otra parte, podemos pensar en una función *g*(*x*) que describe el área bajo la curva desde *a* hasta *x*, representada por:

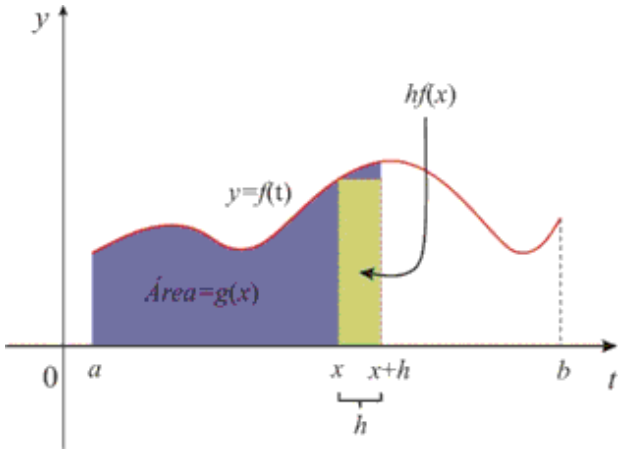
$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$



Ahora, supongamos que queremos calcular el área de la franja azul encerrada bajo la gráfica y los intervalos *x* y *x+h* (ver la parte derecha). Por lo tanto, el área que estamos buscando es simplemente la diferencia de áreas de la región limitada por [*a*, *x+h*] menos el área de la región limitada por [*a*, *x*].



También existe otra manera de estimar el área de ese pequeño segmento de área limitado entre *x* y *x+h*, mediante calcular el área del rectángulo verde cuya área es *h* por *f*(*x*). El área del rectángulo verde es aproximada al área de la franja azul, es decir:



$$hf(x) \approx g(x+h) - g(x)$$

Esta aproximación es más precisa cuando el ancho del rectángulo verde *h* tiende a cero. Se convierte en igualdad cuando *h* tiende a cero como límite.

Ahora, si a la aproximación $hf(x) \approx g(x+h) - g(x)$ la dividimos por *h* en ambos lados, se obtiene:

$$f(x) \approx \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Cuando *h* tiende a 0, se observa que el miembro derecho de la ecuación es sencillamente la derivada de la función y que el miembro izquierdo se queda como $f(x)$.

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)$$

Se muestra entonces de manera intuitiva que $f(x) = g'(x)$, es decir, que la derivada de la función de área $g(x)$ es en realidad la función $f(x)$. Dicho de otra forma, la función de área $g(x)$ es la antiderivada de la función original.

Lo que se ha mostrado es que, intuitivamente, calcular la derivada de una función y "hallar el área" bajo su curva son operaciones "inversas".
Esto lo podemos enunciar en la primera parte del teorema fundamental del cálculo, que dice.

Primera parte del TFC
Dada una función *f* continua en [*a*,*b*], la función *g* definida por:
$g(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad a \le x \le b$
Es continua en [*a*,*b*] y derivable en (*a*,*b*), y $g'(x) = f(x)$

Con la notación de Leibniz para las derivadas podemos escribir el teorema fundamental del cálculo de la siguiente manera. Considérese que *f* es continua.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Recalquemos que esta ecuación indica que, si primero integramos *f* y luego derivamos el resultado, obtendremos nuevamente la función original *f*.

Ejemplo

Determinar la derivada de la función $g(x)=\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$

Solución

Reconoceremos las partes que describe el teorema fundamental del cálculo.

$g(x)=\int_a^x f(t)dt$.

Identificamos que $f(t)=\sqrt{1+t^2}$ es una función continua según el teorema, por lo que finalmente:

$$g'(x)=\sqrt{1+x^2}$$

En el siguiente video podemos ver cómo es que integración y diferenciación son procesos inversos.

https://youtu.be/Fmry7zjhfYc

Segunda parte del teorema fundamental del cálculo

La segunda parte del teorema fundamental del cálculo ofrece un método más sencillo para evaluar integrales.

Segunda parte del TFC
Dada una función *f* continua en [*a*,*b*], entonces
$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$
F es cualquier antiderivada de *f*, de tal forma que *F'=f*

Esto quiere decir que si conocemos una antiderivada *F*, de *f*, es posible evaluar $\int_a^b f(x)dx$ con sólo restar los valores de *F* en los extremos del intervalo [*a*, *b*].

Nota:

Existen estas otras formas para denotar el teorema fundamental del cálculo.

$$F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b = \big[F(x)\big]_a^b = F(b)-F(a)$$

Ejemplo

Evalúa la integral $\int_3^6 \frac{dx}{x}$.

Solución

Una antiderivada de $f(x) = 1/x$ es $F(x) = \ln|x|$. Dado que los límites de integración se encuentran en [3,6] podemos omitir las barras de valor absoluto.

$$\int_3^6 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_3^6 = \ln 6 - \ln 3 = \ln \frac{6}{3} = \ln 2$$

1.2.2. Derivación e integración como procesos inversos

Hemos visto la importancia que tiene el teorema fundamental del cálculo, nos muestra claramente que la integración y la derivación son procesos inversos.
El teorema fundamental queda establecido como a continuación se enuncia. No lo olvides y tenlo siempre presente.

Dada una función *f* continua en un intervalo cerrado [*a, b*].

1. Si $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces $g'(x) = f(x)$.
2. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, donde *F* es cualquier antiderivada de *f*, es decir, *F'=f*.

Las dos partes del teorema fundamental del cálculo expresan que la derivación y la integración son procesos inversos. Cada una deshace lo que hace la otra.

1.3. Integral indefinida

En el siguiente apartado definiremos la integral indefinida como el proceso contrario a la derivación. Esto es una consecuencia del teorema fundamental del cálculo.

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{2}{3}x^3 + C\right] = x^2$$

Cuando quieras conocer una integral sin tener que evaluarla, deberás tener en mente esta imagen, te permitirá hallar de manera más sencilla la integral de una función. Las tablas de integrales resumen estos procesos inversos, te serán de gran ayuda.

1.3.1. Integral indefinida

De las secciones precedentes habíamos llegado a dos puntos muy importantes del teorema fundamental del cálculo.

1. Si *f* es continua entonces $\int_a^x f(t)dt$ es una antiderivada de *f*.
2. Si $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, donde *F* es una antiderivada de *f*.

Sin embargo, por practicidad, es precisa una notación para las antiderivadas. Por lo tanto, a la integral $\int_a^x f(t)dt$ se le llama **integral indefinida**.

Integral indefinida

$$\int f(x)dx = F(x) \quad \Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x)$$

Ejemplo

$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}+C\right) \xrightarrow{\text{derivación}} 2x = f(x)$ esta es la derivada

$f(x) = 2x \xrightarrow{\text{Antiderivación}} \int 2x\,dx = \frac{x^2}{2}+C$ esta es la antiderivada o integral indefinida

C es cualquier constante.

El TFC trae como consecuencia que una integral definida es una familia de funciones para cada valor de *C*.

Nota importante:

La integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es un número.

La integral indefinida $\int f(x)dx$ es una familia de funciones, dado por *C*, que puede ser cualquier número.

1.3.2. Tabla de integrales indefinidas

A continuación, te desplegamos una lista de antiderivadas de funciones, o mejor dicho integrales indefinidas.

Tabla de integrales indefinidas

$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$	$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
$\int k\,dx = kx + C$	
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$
$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \tan^{-1} x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$

De manera semejante a lo que se hizo en la sección anterior, puedes derivar la función del lado derecho para verificar que se obtiene el integrando. Observa.

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad \text{porque} \quad \frac{d}{dx}\left(\ln|x| + C\right) = \frac{1}{x}$$

1.4. Regla de sustitución

Hemos visto cómo evaluar algunas integrales; sin embargo, si te presentan una integral de la siguiente forma,

$$\int \sqrt{1+\theta} d\theta$$

de seguro te surgirán las siguientes preguntas:
¿Cómo le hago?
¿Existe algún truco?
¿Hay algún método para evaluarlas que tenga que ver con raíces?

Las respuestas las encontrarás aquí.

El radical $\sqrt{\ }$ aparentemente te la hace complicada, pero veremos una alternativa interesante para calcular integrales que contengan radicales, veremos que el método de sustitución es ideal para resolver este tipo de integrales.

Lo esencial de esta regla es transformar una integral complicada en una integral más sencilla, Esto se lleva a cabo pasando de la variable original *x* a una nueva variable *u* que es función de *x*.

1.4.1. Regla de sustitución

Hemos visto en nuestras tablas la forma de hallar ciertas antiderivadas; sin embargo, no tenemos las herramientas para evaluar integrales donde se vean involucradas radicales o integrales de la forma:

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

Para resolverlas implementaremos el siguiente método de sustitución:

Lo que haremos será introducir un cambio de variable de $x \to u$.
Designamos por conveniencia a $1+x^2 = u$:

$$u = 1+x^2$$

Calculamos el diferencial du (esto se estudió en cálculo diferencial). Es algo análogo a calcular una derivada.

$$du = 2xdx$$

Ahora reacomodamos nuestra integral para facilitar la identificación de términos. Y sustituir estos dos últimos resultados en nuestra integral:

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{1+x^2}\,2xdx = \int \sqrt{u}\,du = \int u^{1/2}du$$

Nuestra integral ha quedado en términos de la nueva variable *u*, procedemos a calcular la integral con la fórmula: $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ que vimos de la sección de tablas de integración.

$$\int u^{1/2}du = \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{u^{\frac{1+2}{2}}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}} + C = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

Ahora que hemos calculado la integral en términos de la variable *u* procedemos a poner nuestro resultado en la variable anterior, es decir, $u \to x$.

$$\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

Finalmente podemos escribir que:

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

Hemos visto que evaluamos de manera sencilla nuestra integral haciendo la introducción de un cambio de variable.

Para comprobar nuestro resultado, simplemente, derivamos $\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$ respecto de *x* usando la regla de la cadena, la cual se vio en cálculo diferencial.

El procedimiento anterior lo escribimos con la siguiente regla:

Regla de sustitución

Si tenemos una función $u = g(x)$ diferenciable en el intervalo *I,* y además continua en ese mismo intervalo, entonces:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Así que si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)dx$. La clave es pensar en du y dx como diferenciales.

Ejemplo

Encontrar $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

Solución

Proponemos $u = 1-4x^2$, ahora calculamos el diferencial. $du = -8xdx$

Ahora reescribimos nuestra integral, de modo que se adapte a u y du para hacer el cambio de variable. Observa que del cociente se identifica al denominador como du y al denominador como $\sqrt{u}$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \left(-\frac{1}{8}\right)\frac{-8xdx}{\sqrt{1-4x^2}} =$$

$$= \int \left(-\frac{1}{8}\right)\frac{du}{\sqrt{u}} =$$

Identificamos a du y u y la integral se reescribe como:

Seguimos reacomodando términos que se pueden sacar de la integral.

$$= -\frac{1}{8}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{8}\int \frac{du}{u^{1/2}} = -\frac{1}{8}\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{1}{8}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\frac{u^{1/2}}{8} + C$$

Ahora colocamos nuestro resultado en términos de la variable inicial.

$$-\frac{1}{8}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{2}{8}u^{1/2} + C = -\frac{1}{4}\left(1-4x^2\right)^{1/2} + C$$

Finalmente, nuestra integral queda expresada de la siguiente manera.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = -\frac{1}{4}\left(1-4x^2\right)^{1/2} + C$$

Para comprobar, se precede a derivar.

1.4.2. Integrales definidas

Habíamos mencionado anteriormente en una nota que: la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es un número y que la indefinida $\int f(x)dx$ es una familia de funciones, dado por *C*.

Sin embargo, como nos encontramos sumergidos en el tema de integrales definidas trataremos dos maneras de evaluar una integral definida.

La primera consiste en hallar la integral como en los casos propuestos de la sección anterior para evaluar la integral.

Supongamos que piden que evaluemos la integral: $\int_0^3 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$, se calcula la integral y se procede a evaluar según los límites superior e inferior.

$$\int_0^3 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \left[\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{2}{3}\left(1+(3)^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\left(1+(0)^2\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(10)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\left[\sqrt{1000}-1\right]$$

El otro método consiste en cambiar los límites de integración al momento de cambiar la variable. Con ello surge la siguiente regla.

Regla de sustitución para las integrales definidas

Si tenemos una función $g(x)$ continua en el intervalo [*a*, *b*] y *f* también es continua en la imagen de $u = g(x)$, entonces:

$$\int_a^b f\left(g(x)\right)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Analicemos el siguiente ejemplo:

Calculemos la siguiente integral definida $\int_0^e \frac{\ln x}{x}dx$.

Antes que nada, procedamos a realizar el cambio de variable.

$u = \ln x$

Su diferencial es $du = \frac{1}{x}dx$

Identificamos términos y los intercambiamos por la nueva variable, teniendo así:

$$\int_0^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_?^? u\,du$$

Los signos de interrogación “?”, denota que no sabemos los nuevos límites de integración. Ahora los límites de integración quedan definidos por la nueva variable

Cuando $x = 1$ sustituida en $u = \ln x$ da $u = \ln(1) = 0$

y cuando $x = e; u = \ln(e) = 1$

Por tanto los nuevos límites de integración son: 0 y 1, inferior y superior, respectivamente. Quedando así la nueva integral con sus nuevos límites de integración.

$$\int_0^1 u\,du$$

Resolvemos y evaluamos.

$$\int_0^1 u\,du = \frac{u^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

1.4.3. Simetría

En algunas integrales es posible simplificar los cálculos, poniendo atención a sus propiedades. En cálculo diferencial revisaste las propiedades de simetría de una función. Considera lo siguiente.

Integrales de funciones simétricas

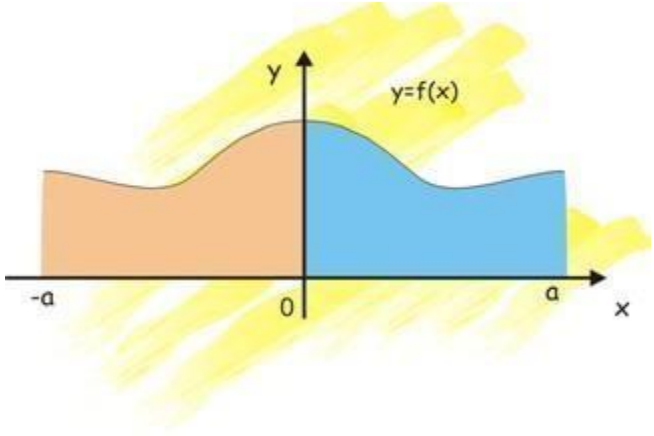
Si tenemos una función *f* continua en el intervalo [-*a*, *a*].

i) Si *f* es par $[f(-x) = f(x)]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

ii) Si *f* es impar $[f(-x) = -f(x)]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

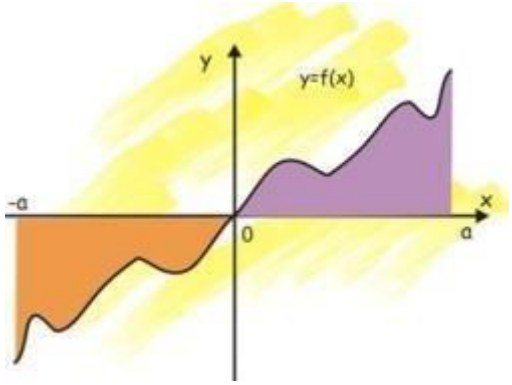
Gráficamente representamos los casos.

El **caso i)** ilustra que *f* es positiva y par, por lo tanto, el área bajo la curva descrita por $f(x)$ es el doble de área desde 0 hasta *a*, debido a que $f(x)$ es simétrica. Lo puedes ver en la siguiente gráfica.



$f(x)$ es par, y se puede hacer $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

En el **caso ii)** tratamos con una función impar. Las áreas se van a cancelar, ya que se trata de una diferencia de áreas.



$f(x)$ es impar, la integral se reduce a $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

En el siguiente video puedes verificar las funciones pares e impares:
http://www.youtube.com/watch?v=qcGmhzmHTm8

Cierre de la unidad

Para abordar este curso de Cálculo Integral es necesario que tengas conocimiento sobre matemáticas, álgebra y cálculo diferencial.

En esta sección requerimos el siguiente material:

- Calculadora.
- Tablas de integración. Puedes obtenerlas de algún libro o bien bajarlas de internet. Te aconsejamos que tengas las tablas para evaluar las integrales.

Es necesario que repases las fórmulas para encontrar áreas a figuras geométricas planas y volumétricas comunes.

Fuentes de consulta

1. Apostol, T. M. (2008). *Calculus*. España: Reverté.
2. Larson, R. E. (2005). *Cálculo*. México: McGraw Hill.
3. Stewart, James. (2008). *Cálculo. Trascendentes tempranas.* México: Cengage Learning.